PUBLICACIONES
DE LA
REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA
SERIE 3.ª TOMO III FASCICULO 3.º

Los espacios proyectivos y los algebráicos

DISCURSO INAUGURAL LEIDO POR EL ACADEMICO DON PEDRO ABELLANAS EN LA SESION CELEBRADA EL 23 DE NOVIEMBRE DE 1947

1948

LOS ESPACIOS PROYECTIVOS Y LOS ALGEBRAICOS

DISCURSO INAUGURAL LEIDO POR EL ACADEMICO DON PEDRO ABELLANAS EN LA SESION CELEBRADA EL 23 DE NOVIEMBRE DE 1947

La aplicación de las normas acordadas por la Academia para la designación del académico a cuyo cargo ha de estar el discurso de las sesiones inaugurales de sus cursos, ha hecho recaer sobre nosotros el honor de representar a la Corporación en este acto. Hemos procurado corresponder con nuestra mejor voluntad al encargo recibido; confiando en que la benevolencia de nuestros oyentes sabrá suplir nuestras deficiencias.

INTRODUCCION. — Toda ciencia se ha engendrado a partir de un período precientífico, en el que su contenido se reducía a un conjunto de resultados empíricos, en general, de interés utilitario. Esta era la situación de la Matemática hasta los griegos. Ahora bien, el conocimiento científico, propiamente tal, y, por consiguiente, la verdadera ciencia, nace cuando ese conjunto disperso y anárquico de conocimientos empíricos se articulan mediante una teoría. Este paso es de signo contrario al conocimiento experimental; para conseguirlo es necesario prescindir de la realidad exterior, cuya observación ha proporcionado los resultados empíricos, y, mediante un proceso de abstracción, crear una realidad *ideal* —el carácter esencial de la realidad ideal consiste en que su existencia depende del pensamiento humano—, esta realidad ideal, o teoría, debe de ser lo más sencilla posible y contener todos los resultados experimentales como consecuencia de un pequeño número de proposiciones fundamentales.

La Matemática fué la primera ciencia, propiamente tal, que realizó el paso transcendente del empirismo a la teoría, siendo, por lo tanto, la primera ciencia de que dispuso la Humanidad. Creemos que no se ha concedido la debida importancia al hecho histórico de la prioridad de la Matemática sobre las otras ciencias, y que, sin embargo, en él está contenida la explicación de lo que la Matemática ha significado y significará en la evolución científica. En efecto, a nuestro juicio, no se debe atribuir a un mero azar la prioridad de la Matemática en el desarrollo científico, sino que este hecho significa que la existencia de esta ciencia era indispensable para la evolución científica en general. Como justificación de esta proposición conviene recordar la tendencia hacia la matematización que muestran las otras ciencias. Entre ellas el caso más claro es el de la Física. Esta ciencia es, prescindiendo de la Matemática, la que ha alcanzado en la actualidad mayor nivel científico y es a su vez la ciencia que antes empezó a matematizarse, pudiendo decirse que hoy día lo está completamente y que los métodos de trabajo del físico teórico y del matemático no defieren absolutamente nada. Otro tanto, aunque con algunos siglos de diferencia, le está sucediendo a la Química en cuanto ciencia teórica, y, de un modo todavía embrionario, a las restantes ciencias.

El hecho de que una ciencia se proclame en la actualidad independiente del método matemático, y hasta incompatible con él, no quiere decir, a nuestro modo de ver, que ésta sea la verdad definitiva; lo único que nos indica es que dicha ciencia se encuentra todavía en un período precientífico —como se encontraba la Matemática entre los egipcios y la Física hasta el renacimiento—, en el que no dispone de suficientes datos experimentales que permitan ajustarlos dentro de la matemática, y que esta ciencia, por su parte, no ha adquirido todavía el desarrollo preciso para proporcionar un esquema matemático apto para aquélla; pero que en un plazo más o menos lejano se producirá el encuentro feliz de estos dos hechos, y, entonces, se encajarán los resultados empíricos en el esquema matemático y aparecerá la primera exposición verdaderamente científica de la, hasta entonces, ciencia experimental. Como dato muy elocuente de nuestra afirmación citaremos el caso de Ortega y Gasset. Este insigne pensador, como buen metafísico, no cree en la Matemática, y por ello tiene más valor el hecho. Helo aquí: el ilustre filósofo se da cuenta de que la Historia no ha salido todavía del empirismo y se propone dar un primer paso hacia la construcción de una ciencia histórica, o, lo que es lo mismo, de una Historia Teórica, que él llama: "Historia como sistema". Pues bien, al buscar un método adecuado para la construcción de la Ciencia histórica, va a parar al esquema matemático de las generaciones. Naturalmente que, inmediatamente después de exponerlo, reacciona contra la Matemática y exclama: "¿Qué se pretende con esto? ¿Que el automatismo matemático decida con su característica estupidez y abstracción de la realidad histórica? En modo alguno". Ahora bien, lo que a nosotros nos interesa de este hecho es que en el momento en que se quiere hacer verdadera ciencia se cae, quiérase o no, en el empleo de un esquema matemático. Naturalmente, que el esquema matemático de la historia no puede ser, ni mucho menos, de una estructura tan simple como propone Ortega y Gasset —y para que no se crea esto es por lo que lanza el exabrupto que les he citado a Vds.—, y, como él dice, no tiene más misión que el de dar una primera aproximación para agarrar la verdad histórica; pero creemos que corrobora nuestra anterior afirmación.

El carácter de prioridad de la Matemática trae como consecuencia una situación inicial de vanguardia dentro del mundo científico, la cual ha conservado a lo largo de la historia; pues, si bien es cierto que algunos problemas ajenos a la Matemática han sido origen de importantes teorías de ésta, estas teorías han transcendido por completo del marco particular en que estaba encuadrado el problema de origen. Aclararemos esto con un ejemplo: Newton trató por primera vez el problema de la determinación de la forma que debía de tener la cabeza de un proyectil de revolución para que en el movimiento de éste en un medio resistente, la resistencia fuese mínima. En 1696, Juan Bernoulli, propuso y resolvió el problema de determinar la curva que debía de describir un grave para descender de un punto a otro, no situados en la misma vertical, en el menor tiempo posible. Estos dos problemas dieron origen a lo que hoy constituye el Cálculo de Variaciones; ahora bien, esta teoría tiene una existencia independientemente de los mencionados problemas, los cuales tienen un interés meramente histórico dentro de ella, ya que, igual que dichos problemas, hubiesen podido dar origen a la teoría otros muchos de carácter puramente matemático. Por el contrario, la Teoría de la relatividad de Einstein se apoya en la geometría de los espacios curvos de Riemann, anterior a ella, de tal modo que no puede subsistir si se prescinde de ellos. Creemos que con estos dos ejemplos queda suficientemente clara la relación de influencia de la Matemática con las otras ciencias.

Este carácter de vanguardia de la Matemática hace que sus cultivadores atiendan con más interés el desarrollo de la Matemática pura que al de teorías que en la actualidad han pasado ya a otros sectores científicos. a quienes interesa en determinadas direcciones. Les impulsa a ello no solo la belleza intrínseca de la Matemática pura sino también el convencimiento de que tarde o temprano contribuirán estas teorías, que en la actualidad aparecen muy distantes de aplicación a otras ciencias, a la madurez de éstas y, por tanto, a un mejor conocimiento de los fenómenos del Universo y de la Humanidad.

Con todo esto hemos querido justificar a la Matemática pura ante personas alejadas de ella; pues, creemos que la actividad no se justifica por sí misma y conviene crear en todo momento un clima favorable para el cultivo científico, procurando evitar que la opinión caiga en el error de desestimar el papel de la Ciencia en su totalidad o bien en cualquiera de sus dos componentes: especulación y experimentación. A nosotros nos corresponde defender la parte especulativa que, por otra parte, es por naturaleza la menos popular.

Hora es ya de que nos ocupemos del tema de esta conferencia; pero para poder enfocarlo creemos conveniente unas consideraciones previas.

1. *Espacio y geometría.* — A partir de F. Klein se define una geometría como *el estudio de las propiedades de un espacio y de figuras en él definidas que permanecen invariantes respecto de todas las transformaciones, de un grupo admisible por el espacio.* Por consiguiente, en toda geometría existen dos conceptos fundamentales: *espacio* y *grupo de transformaciones.*

Para dar una idea aproximada de qué se entiende por espacio en Matemática nos fijaremos en un ejemplo: Consideremos el conjunto formado por todas las fichas del juego de dominó, y convengamos en llamar punto *1* al conjunto formado por todos los unos de dichas fichas; análogamente, llamaremos punto *2* al conjunto de todos los doses, etc.; finalmente llamaremos punto *0* al conjunto de todas las blancas. Obtenemos así un conjunto formado por siete puntos. Este conjunto no es un espacio. Ahora bien, si llamamos segmento a cada una de las fichas y convenimos en que cada ficha contiene a los dos números que en ella figuran y que dichos puntos están contenidos en la ficha, queda convertido el conjunto formado por dichos puntos en un espacio. Obtenemos así un espacio formado por siete únicos puntos. Es decir, un espacio es un conjunto de entes abstractos, a los que se llama puntos, entre los cuales se ha definido una relación de proximidad que cumple ciertas condiciones.

Las transformaciones se definen como correspondencias entre dos espacios, llamados espacio original y espacio imagen, tales que a todo punto del primero corresponde una figura, no vacía, en el segundo.

En la definición de geometría figura la condición de que el espacio admita al grupo de transformaciones correspondiente; esto quiere decir que el resultado de aplicar una transformación cualquiera del grupo a cualquier punto del espacio original nos proporcione una figura, no vacía, del espacio imagen, y que el conjunto de todas éstas llenen por completo a dicho espacio imagen. De aquí la siguiente cuestión: *Dado un grupo de transformaciones determinar todos los espacios que las admiten.* Estos espacios se llaman espacios propios de la geometría correspondiente. Ahora bien, se presenta la dificultad de que para definir las transformaciones necesitamos poseer previamente el espacio. Esta dificultad la evitamos, del mismo modo que se ha resuelto en el proceso histórico de la Geometría, tomando como espacio provisional para definir las transformaciones un espacio euclídeo.

Ahora queda precisado el tema de que nos vamos a ocupar: se trata de determinar los espacios propios de la geometría proyectiva y de la algebraica.

2. *Los espacios proyectivos.* — Tomando, según hemos advertido, como espacios auxiliares los espacios euclídeos, podemos dar las siguientes definiciones de proyectividades:

a) *Definición de Poncelet.* — Se llama proyectividad entre dos espacios E_r y E'_r de la misma dimensión, r, y sumergidos en un mismo espacio ambiente E_n, a toda correspondencia biunívoca entre ellos obtenida mediante un número finito de proyecciones y secciones.

b) *Definición de Staudt.* — Se llama proyectividad entre dos espacios E_r y E_r, de la misma dimensión $r > 1$, a toda correspondencia biunívoca entre ellos respecto de la cuál sean invariantes la dependencia y la independencia lineales. Se llama proyectividad entre dos espacios de dimensión 1 a toda correspondencia biunívoca entre ellos que conserve las razones armónicas.

En virtud de la definición de Poncelet, para que un espacio admita al grupo de las proyectividades es necesario y suficiente que admita a las perspectividades. Ahora bien, para que las perspectividades establezcan una correspondencia biunívoca sin excepción entre dos espacios euclídeos de dimensión *r* sumergidos en un espacio, E_n, de dimensión *n*, es necesario y suficiente que si E_r y E_{n-r} son dos subespacios cualesquiera de E, de dimensiones *r* y *n-r* respectivamente, con la condición de que E_{n-r}, contenga a un subespacio E_{n-r-1}, tal que éste y E_r no tengan ningún punto común, se verifique que dichos espacios E_r y E_{n-r} tengan *siempre* un punto común y sólo uno. Ahora bien, los puntos comunes a E_r y a E_{n-r}, vienen dados por un sistema de *n* ecuaciones lineales, no homogéneas, con *n* incógnitas, y, en virtud de la condición impuesta a los espacios E_r y E_{n-r}, se verifica que la característica de la matriz ampliada de dicho sistema es *n*, luego la característica de la matriz de los coeficientes ha de ser también *n;* pero ésto no sucede siempre y, por tanto, el espacio euclídeo no es proyectivo

Ahora bien, este hecho nos pone sobre la pista para construir un espacio proyectivo, ya que si homogeneizamos el anterior sistema de ecuaciones, obtendremos un sistema que siempre tendrá infinitas soluciones, y si $(a_0, a_1, \ldots a_n)$ es una de ellas, todas las restantes se obtienen sin más que multiplicar ésta por un factor de proporcionalidad. Ahora bien, nosotros necesitábamos que los espacios E_r y E_{n-r} tuviesen un único punto común, de aquí la necesidad de convenir en que todas las soluciones anteriores representen un mismo punto. Esto nos proporciona la siguiente definición: *Se llama punto de un espacio proyectivo de dimensión n a toda matriz de una fila y n + 1 columnas cuyos elementos pertenecen al cuerpo de los números reales y no son todos nulos, conviniendo en que dos matrices proporcionales representan al mismo punto.* Ahora bien, según hemos indicado anteriormente, el conjunto formado por todos estos puntos no constituye un espacio. Para transformarlo en un espacio que sirva a nuestro objeto conviene proceder de la siguiente forma: *Llamaremos hiperplano a toda matriz de una columna y n + 1 filas cuyos elementos son números reales no todos nulos con la condición de que dos matrices proporcionales representan al mismo hiperplano.* Entre los puntos e hiperplanos se define ahora la siguiente relación: *Un punto y un hiperplano se llaman incidentes cuando el producto de sus matrices es nulo.* Mediante esta relación de incidencia queda convertido el anterior conjunto de puntos en un espacio. Se comprueba ahora sin dificultad que este espacio admite al grupo de las proyectividades y es, por consiguiente, un espacio proyectivo.

Los espacios así obtenidos no son los espacios proyectivos más generales que se pueden construir; estos se obtienen sustituyendo el cuerpo de los números reales por un cuerpo arbitrario. Al cuerpo que se emplea para definir un espacio proyectivo se le llama cuerpo base del mismo.

Como puede sospecharse, existen propiedades de los espacios proyectivos que dependen de su cuerpo base. La más importante es la siguiente: Si el cuerpo base es arbitrario, las definiciones de proyectividad de Poncelet y Staudt no son, en general, equivalentes. La relación entre ambas es la siguiente: *Toda proyectividad en el sentido de Staudt equivale a una proyectividad en el sentido de Poncelet precedida de un automorfismo del cuerpo base.* En virtud de este teorema resulta que la condición necesaria y suficiente para que las definiciones de Poncelet y Staudt sean equivalentes, es que el cuerpo base no admita más automorfismos que el unidad.

Nosotros hemos demostrado el siguiente:

Teorema. La condición necesaria y suficiente para que un cuerpo ordenado no posea más automorfismos que el unidad, es que sea arquimedeano y que en él sea posible la extracción de raíces cuadradas de todos los elementos positivos.

Queda pendiente de solución este problema para cuerpos no ordenables.

Las proyectividades en el sentido de Poncelet entre dos espacios P_n y P'_n se representan analíticamente mediante n ecuaciones obtenidas igualando a cero n formas bilineales en dos series de variables $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ e $(y_0, y_1 \ldots y_n)$, correspondientes a los puntos generales de P_n P'_n respectivamente. De este modo se nos presentan las proyectividades como un caso particular de otras transformaciones, más generales, definidas por un sistema de m ecuaciones obtenidas igualando a cero m formas bihomogéneas respecto de las (x) y respecto de las (y) de grados arbitrarios. Estas transformaciones se llaman *algebraicas,* sus espacios correspondientes: *algebraicos,* y su geometría: *Geometría algebraica.*

3. LOS ESPACIOS ALGEBRAICOS. Por la definición de transformaciones algebraicas, podría pensarse que los espacios algebraicos eran los mismos espacios proyectivos, pero, como vamos a ver, no es así

En efecto, consideremos la correspondencia algebraica, T, definida por un sistema, S, de ecuaciones bihomogéneas en las (x) y en las (y) que cumpla las siguientes condiciones: 1.ª La variedad algebraica representada por las ecuaciones S es irreductible. 2.ª Entre las ecuaciones S existe una, $f_\alpha = o$, en la que figuran únicamente las (x), y de grado, α, superior al primero. El conjunto de todos los puntos a los que corresponden imágenes, no vacías, mediante la transformación T, se obtiene eliminando en el sistema S las (y). Así se obtiene un sistema eliminante, S', formado por ecuaciones en las (x), entre las que figura la ecuación $f_\alpha = o$. Ahora bien por ser la variedad representada por S irreducible, también lo es la variedad representada por S'; y como entre estas ecuaciones figura una, la $f_\alpha = o$, de grado mayor que 1, resulta que la variedad correspondiente no es lineal, y por tanto, no es ningún espacio proyectivo.

Ahora bien, ¿se puede decir de las variedades algebraicas que sean espacios? La respuesta es afirmativa. Para ello basta con establecer que el conjunto de todas las subvariedades, de la variedad considerada, constituye una base para los conjuntos cerrados de la misma. De este modo queda convertida dicha variedad en un espacio topológico.

Resulta, por consiguiente, que *el conjunto de los espacios algebraicos coincide con el de las variedades algebraicas.*

El concepto básico de la geometría algebraica es el de punto general de una variedad algebraica. Sin entrar en su definición, nos limitaremos a decir que el punto general de una varidad algebraica de dimensión r, viene representado por una matriz: $(\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_n)$ en donde las (ξ) son funciones algebraicas definidas por ecuaciones cuyos coeficientes son polinomios en r parámetros con coeficientes del cuerpo base.

Sea V' la variedad algebraica transformada de V mediante la transformación T. Representemos por $(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n)$ al punto general de V, por $(\xi'_0, \xi'_1, \ldots \xi'_m)$ al punto general de V' por $\sum$ al cuerpo que resulta de efectuar la adjunción al cuerpo base, k, de todas las (ξ), y por $\sum'$ al cuerpo que resulta de efectuar la adjunción a k de todas las (ξ'). Existe un subgrupo del grupo de las transformaciones algebraicas caracterizado por la propiedad de que para todas las transformaciones, T, del mismo, se verifica que los cuerpos $\sum$ y $\sum'$, construídos según acabamos de indicar, son isomorfos. A estas transformaciones se les llama *birracionales*. Estas transformaciones son las más sencillas entre las algebraicas y gozan de la propiedad de que la correspondencia es biunívoca para *casi* todos los puntos.

La propiedad más característica de las transformaciones algebraicas, que las diferencian de otras transformaciones —incluso de las topológicas—, es que en ellas el concepto de punto no es invariante. De aquí nace la mayor complicación de estas transformaciones y al mismo tiempo las propiedades que dan á su estudio mayor interés.

En las transformaciones birracionales el concepto de punto viene sustituído por el concepto invariante de *rama de curva*. Las ramas de curvas de una variedad algebraica vienen representadas por series de potencias, en un parámetro cuyos exponentes no son, en general, enteros. Al dar al parámetro el valor cero toman dichas series valores numéricos que representan las coordenadas de un punto de la variedad llamado el *origen* de la rama. Este concepto de rama que es muy manejable cuando la variedad de que se trata es una curva, deja de serlo al aumentar la dimensión de la variedad; de aquí la necesidad de sustituirlo por otro más sencillo. Este nuevo concepto es el de *valoración* de los cuerpos algebraicos. La teoría general de las valoraciones se debe a W. Krull y su introducción y empleo sistemático para el estudio de las transformaciones birracionales se debe a O. Zariski. Una valoración de un cuerpo es una cierta representación del mismo sobre un grupo abeliano y aditivo. Entre las valoraciones existe un subconjunto formado por las llamadas *valoraciones de dimensión cero,* que goza de la propiedad de que todas sus valoraciones pueden definirse mediante ramas de curvas contenidas en la variedad correspondiente. Al origen de estas ramas se le llama *centro* de la valoración correspondiente. Este concepto de centro de una valoración puede extenderse a valoraciones de cualquier dimensión y su introducción en la Geometría Algebraica, que se debe a Zariski, es de la mayor importancia, ya que permite manejar las subvariedades de una variedad como entes independientes de los puntos que contienen, pudiéndose definir mediante él la transformada de una subvariedad mediante una transformación birracional sin hacer intervenir los puntos de los que esté formada dicha subvariedad.

Las propiedades topológicas de una variedad algebraica están íntimamente relacionadas, según mostró Lefschetz, con la variedad de Riemann correspondiente. Ahora bien, según Dedekind, la variedad de Riemann correspondiente a un cuerpo de funciones algebraicas está formada por el conjunto de todos los *lugares* —Stellen— de dicho cuerpo. Por lugar de un cuerpo se entiende un homomorfismo del mismo sobre una ampliación algebraica del cuerpo base más el símbolo ∞; pues bien, estos homomorfismos son equivalentes a las valoraciones de dimensión cero, de aquí que se pueda definir como variedad de Riemann correspondiente a una variedad dada el conjunto formado por todas las valoraciones de dimensión cero de la misma. Ahora bien, las variedades de Riemann correspondientes a variedades definidas sobre el cuerpo de los números complejos gozan de la propiedad de ser espacios topológicos bicompactos. Esta propiedad es esencial en el estudio topológico de las variedades algebraicas; su extensión al caso de un cuerpo base arbitrario se debe a Zariski, el cual lo consigue mediante su Teoría de la uniformización local y el empleo de un teorema de compacidad de Steenrod.

El método aritmético de Zariski que ha convertido a la Geometría Algebraica en uno de los más bellos y rigurosos capítulos de la Matemática, nos ha permitido establecer los fundamentos de un estudio aritmético de las correspondencias algebraicas en general. En el paso de las transformaciones birracionales a las algebraicas aparece la complicación de que en éstas las valoraciones de dimensión cero ya no son invariantes como en aquellas, pudiendo transformarse en valoraciones de cualquier dimensión. No obstante, los resultados alcanzados nos permiten confiar en que el método aritmético de Zariski producirá en el estudio de las correspondencias algebraicas resultados tan fructíferos como ha producido ya en el de las correspondencias birracionales, siendo, por consiguiente, el método propio de la Geometría Algebraica.